

«УТВЕРЖДАЮ»

Директор

ФГБНУ «Федеральный институт  
педагогических измерений»

О.А. Решетникова

«10» сентября 2025 г.

«СОГЛАСОВАНО»

Председатель

Научно-методического совета  
ФГБНУ «ФИПИ» по математике

Д.В. Ливанов

«10» сентября 2025 г.

**Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ**

**Демонстрационный вариант**  
контрольных измерительных материалов  
единого государственного экзамена 2026 года  
по МАТЕМАТИКЕ

**Профильный уровень**

подготовлен федеральным государственным бюджетным  
научным учреждением  
«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ»

**Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ**

**Пояснения к демонстрационному варианту  
контрольных измерительных материалов единого государственного  
экзамена 2026 года по МАТЕМАТИКЕ**

**Профильный уровень**

При ознакомлении с демонстрационным вариантом контрольных измерительных материалов (КИМ) единого государственного экзамена (ЕГЭ) 2026 г. следует иметь в виду, что задания, включённые в него, не отражают всех элементов содержания, которые будут проверяться с помощью вариантов КИМ в 2026 г. Полный перечень элементов содержания, которые могут контролироваться на едином государственном экзамене 2026 г., приведён в кодификаторе проверяемых требований к результатам освоения основной образовательной программы среднего общего образования и элементов содержания для проведения единого государственного экзамена по математике.



**В демонстрационном варианте представлены конкретные примеры заданий, не исчерпывающие всего многообразия возможных формулировок заданий на каждой позиции варианта экзаменационной работы.**

Назначение демонстрационного варианта заключается в том, чтобы дать возможность любому участнику ЕГЭ и широкой общественности составить представление о структуре будущих КИМ, количестве заданий, об их форме и уровне сложности.

Приведённые критерии оценки выполнения заданий с развёрнутым ответом, включённые в этот вариант, дают представление о требованиях к полноте и правильности записи развёрнутого ответа.

**В демонстрационном варианте представлено по несколько примеров заданий на некоторых позициях экзаменационной работы. В реальных вариантах экзаменационной работы на каждой позиции будет предложено только одно задание.**

Эти сведения позволят выпускникам выработать стратегию подготовки к ЕГЭ в 2026 г.

**Демонстрационный вариант  
контрольных измерительных материалов  
единого государственного экзамена 2026 года  
по МАТЕМАТИКЕ**

**Профильный уровень**

**Инструкция по выполнению работы**

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ

Ответ: -0,8

-	0	,	8																
---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

При выполнении работы разрешается использовать линейку.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов № 1 и № 2 был записан под правильным номером.

**Желаем успеха!**

**Справочные материалы**

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

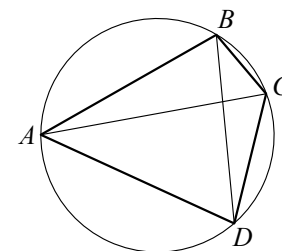
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

**Часть 1**

*Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.*

**1**

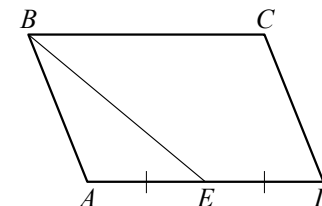
Четырёхугольник  $ABCD$  вписан в окружность. Угол  $ABC$  равен  $103^\circ$ , угол  $CAD$  равен  $42^\circ$ . Найдите угол  $ABD$ . Ответ дайте в градусах.



Ответ: \_\_\_\_\_.

**ИЛИ**

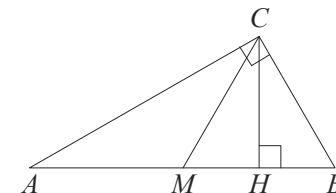
Площадь параллелограмма  $ABCD$  равна 24. Точка  $E$  — середина стороны  $AD$ . Найдите площадь трапеции  $BCDE$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

**ИЛИ**

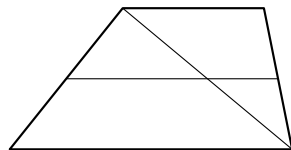
Острый угол  $B$  прямоугольного треугольника  $ABC$  равен  $65^\circ$ . Найдите величину угла между высотой  $CH$  и медианой  $CM$ , проведёнными из вершины прямого угла  $C$ . Ответ дайте в градусах.



Ответ: \_\_\_\_\_.

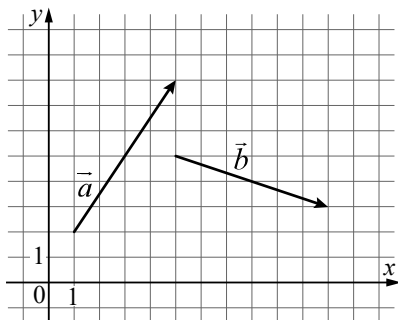
**ИЛИ**

Основания трапеции равны 4 и 10. Найдите больший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из её диагоналей.



Ответ: \_\_\_\_\_.

- 2 На координатной плоскости изображены векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Найдите скалярное произведение  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

**ИЛИ**

Даны векторы  $\vec{a}(2; 0)$  и  $\vec{b}(1; 4)$ . Найдите длину вектора  $\vec{a} + 3\vec{b}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

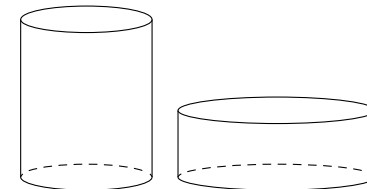
**ИЛИ**

Даны векторы  $\vec{a}(5; 4)$  и  $\vec{b}(8; -9)$ . Найдите скалярное произведение  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

**3**

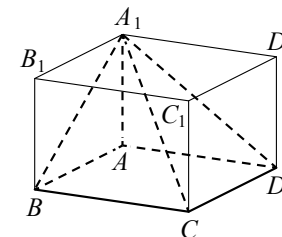
Одна цилиндрическая кружка вдвое выше второй, зато вторая в полтора раза шире. Найдите отношение объёма второй кружки к объёму первой.



Ответ: \_\_\_\_\_.

**ИЛИ**

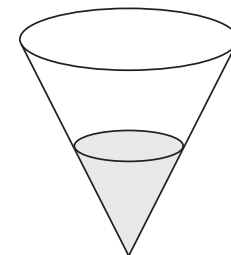
Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины  $A, B, C, D, A_1$  прямоугольного параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , у которого  $AB = 3$ ,  $AD = 9$ ,  $AA_1 = 4$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

**ИЛИ**

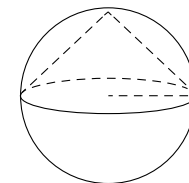
В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает  $\frac{1}{3}$  высоты. Объём жидкости равен 4 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?



Ответ: \_\_\_\_\_.

**ИЛИ**

Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса. Образующая конуса равна  $9\sqrt{2}$ . Найдите радиус сферы.



Ответ: \_\_\_\_\_.

4 В группе туристов 50 человек. Их вертолётom доставляют в труднодоступный район, перевозя по 5 человек за рейс. Порядок, в котором вертолёт перевозит туристов, случаен. Найдите вероятность того, что турист В., входящий в состав группы, полетит первым рейсом вертолётa.

Ответ: \_\_\_\_\_.

ИЛИ

Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 20 пассажиров, равна 0,94. Вероятность того, что окажется меньше 15 пассажиров, равна 0,56. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 15 до 19 включительно.

Ответ: \_\_\_\_\_.

ИЛИ

На конференцию приехали учёные из трёх стран: 3 из Дании, 4 из Венгрии и 3 из Болгарии. Каждый из них делает на конференции один доклад. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что седьмым окажется доклад учёного из Болгарии.

Ответ: \_\_\_\_\_.

5 Помещение освещается тремя лампами. Вероятность перегорания каждой лампы в течение года равна 0,7. Лампы перегорают независимо друг от друга. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

Ответ: \_\_\_\_\_.

ИЛИ

В коробке 5 синих, 9 красных и 11 зелёных фломастеров. Случайным образом выбирают два фломастера. Найдите вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастеры.

Ответ: \_\_\_\_\_.

ИЛИ

При выпечке хлеба производится контрольное взвешивание свежей буханки. Известно, что вероятность того, что её масса окажется меньше 810 г, равна 0,95. Вероятность того, что масса буханки окажется больше 790 г, равна 0,84. Найдите вероятность того, что масса буханки окажется больше 790 г, но меньше 810 г.

Ответ: \_\_\_\_\_.

ИЛИ

В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в первом автомате закончится кофе, равна 0,2. Вероятность того, что кофе закончится во втором автомате, такая же. Вероятность того, что кофе закончится в двух автоматах, равна 0,18. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в двух автоматах.

Ответ: \_\_\_\_\_.

6 Найдите корень уравнения  $\left(\frac{1}{3}\right)^{3-x} = 81$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

ИЛИ

Найдите корень уравнения  $\sqrt{44-5x} = 3$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

ИЛИ

Найдите корень уравнения  $\log_8(5x+47) = 3$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

ИЛИ

Решите уравнение  $\sqrt{2x+3} = x$ . Если корней окажется несколько, то в ответе запишите наименьший из них.

Ответ: \_\_\_\_\_.

7

Найдите значение выражения  $3\sin\frac{13\pi}{12} \cdot \cos\frac{13\pi}{12}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

ИЛИ

Найдите значение выражения  $\frac{\log_7 32}{\log_7 2}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

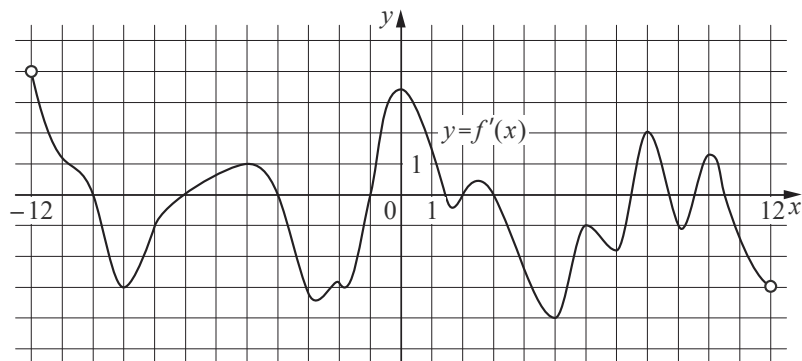
ИЛИ

Найдите значение выражения  $25^{2\sqrt{8}+3} \cdot 5^{-3-4\sqrt{8}}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

8

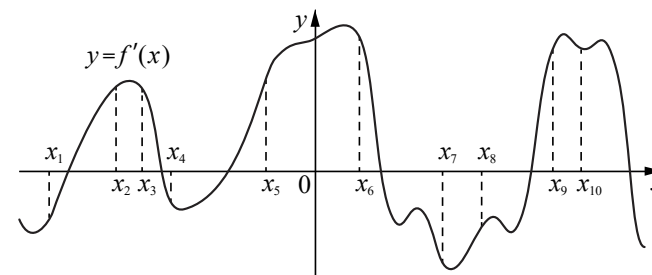
На рисунке изображён график  $y=f'(x)$  — производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-12;12)$ . Найдите количество точек максимума функции  $f(x)$ , принадлежащих отрезку  $[-6;11]$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

ИЛИ

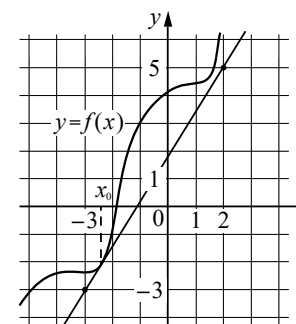
На рисунке изображён график  $y=f'(x)$  производной функции  $f(x)$ . На оси абсцисс отмечено десять точек:  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}$ . Сколько из этих точек принадлежит промежуткам возрастания функции  $f(x)$ ?



Ответ: \_\_\_\_\_.

ИЛИ

На рисунке изображены график функции  $y=f(x)$  и касательная к нему в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

- 9 Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью  $v_0 = 90$  км/ч, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением  $a = 16$  км/ч<sup>2</sup>. Расстояние (в км) от мотоциклиста до города вычисляется по формуле  $S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$ , где  $t$  — время в часах, прошедшее после выезда из города. Определите время, прошедшее после выезда мотоциклиста из города, если известно, что за это время он удалился от города на 72 км. Ответ дайте в минутах.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**ИЛИ**

Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой  $f_0 = 295$  Гц. Чуть позже гудок издал подъезжающий к платформе такой же тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка  $f$  (в Гц) больше первого: она зависит от скорости тепловоза  $v$  (в м/с) и изменяется по закону  $f(v) = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}}$  (Гц),

где  $c$  — скорость звука (в м/с). Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее чем на 5 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы, а  $c = 300$  м/с. Ответ дайте в м/с.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**ИЛИ**

Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением  $a$  (в км/ч<sup>2</sup>). Скорость  $v$  (в км/ч) вычисляется по формуле  $v = \sqrt{2la}$ , где  $l$  — пройденный автомобилем путь (в км). Найдите ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 0,5 км, развить скорость 70 км/ч. Ответ дайте в км/ч<sup>2</sup>.

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 10 От пристани А к пристани В, расстояние между которыми равно 323 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 2 часа после этого следом за ним со скоростью на 2 км/ч больше отправился второй. Найдите скорость второго теплохода, если в пункт В он прибыл одновременно с первым. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**ИЛИ**

Смешав 45%-й и 97%-й растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 62%-й раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50%-го раствора той же кислоты, то получили бы 72%-й раствор кислоты. Сколько килограммов 45%-го раствора использовали для получения смеси?

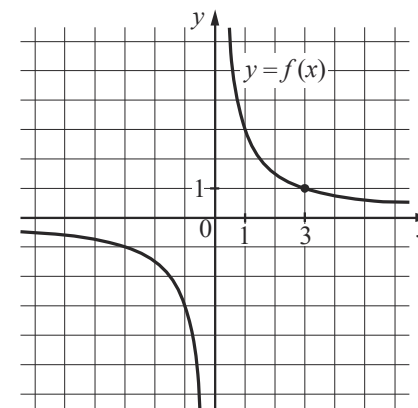
Ответ: \_\_\_\_\_.

**ИЛИ**

Первая труба пропускает на 5 литров воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 104 литра она заполняет на 5 минут дольше, чем вторая труба?

Ответ: \_\_\_\_\_.

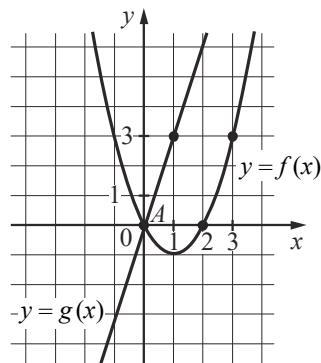
- 11 На рисунке изображён график функции вида  $f(x) = \frac{k}{x}$ . Найдите значение  $f(30)$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

**ИЛИ**

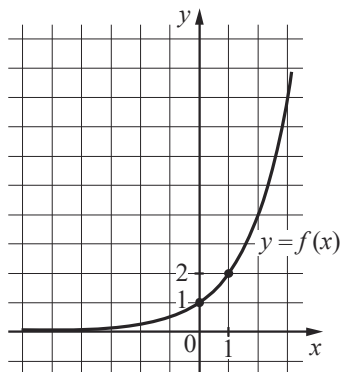
На рисунке изображены графики функций  $f(x) = ax^2 + bx + c$  и  $g(x) = kx$ , пересекающиеся в точках  $A$  и  $B$ . Найдите абсциссу точки  $B$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

**ИЛИ**

На рисунке изображён график функции вида  $f(x) = a^x$ . Найдите значение  $f(5)$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

**12**

Найдите точку максимума функции  $y = 9 \cdot \ln(x - 4) - 9x - 7$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

**ИЛИ**

Найдите точку максимума функции  $y = (x + 8)^2 \cdot e^{3-x}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

**ИЛИ**

Найдите точку минимума функции  $y = -\frac{x}{x^2 + 256}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

**ИЛИ**

Найдите точку максимума функции  $y = x^3 + 27x^2 + 11$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.



**Не забудьте перенести все ответы в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.**

## Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте **БЛАНК ОТВЕТОВ № 2**. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

а) Решите уравнение

$$2\sin^3 x = \sqrt{2} \cos^2 x + 2\sin x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$ .

ИЛИ

а) Решите уравнение

$$2 + 2\cos(\pi - 2x) + \sqrt{8} \sin x = \sqrt{6} + \sqrt{12} \sin x.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$ .

14

В правильном тетраэдре  $ABCD$  точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $AB$  и  $CD$  соответственно. Плоскость  $\alpha$  перпендикулярна прямой  $MN$  и пересекает ребро  $BC$  в точке  $K$ .

а) Докажите, что прямая  $MN$  перпендикулярна рёбрам  $AB$  и  $CD$ .б) Найдите площадь сечения тетраэдра  $ABCD$  плоскостью  $\alpha$ , если известно, что  $BK = 1$ ,  $KC = 3$ .

ИЛИ

В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  через ребро  $AB$  провели плоскость  $\alpha$ , образующую сечение  $ABMN$ , где точки  $M$  и  $N$  — точки пересечения плоскости  $\alpha$  с боковыми рёбрами  $SC$  и  $SD$  соответственно. Известно, что  $AB = BM = AN = 5MN$ .

а) Докажите, что точки  $M$  и  $N$  делят рёбра  $SC$  и  $SD$  в отношении 1:4, считая от вершины  $S$ .б) Найдите косинус угла между плоскостью основания  $ABCD$  и плоскостью  $\alpha$ .

15

Решите неравенство  $\frac{\log_2(2-x) - \log_2(x+1)}{\log_2 x^2 + \log_2 x^4 + 1} \geq 0$ .

ИЛИ

Решите неравенство  $\frac{27^x - 9^{x+1} + 3^{x+3} - 27}{50x^2 - 110x + 60,5} \geq 0$ .

16

В июле 2026 года планируется взять кредит на десять лет в размере 800 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг будет возрастать на  $r\%$  по сравнению с концом предыдущего года ( $r$  — целое число);
- с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;
- в июле 2027, 2028, 2029, 2030 и 2031 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- в июле 2031 года долг должен составить 200 тыс. рублей;
- в июле 2032, 2033, 2034, 2035 и 2036 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2036 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 1480 тыс. рублей. Найдите  $r$ .

ИЛИ

15 декабря 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму  $A$  млн рублей на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- к 15 декабря 2028 года кредит должен быть полностью погашен.

Чему равно  $A$ , если общая сумма платежей в 2028 году составит 17 925 тыс. рублей?



- 17** Пятиугольник  $ABCDE$  вписан в окружность. Известно, что  $AB = CD = 3$ ,  $BC = DE = 4$ .

- а) Докажите, что  $AC = CE$ .  
б) Найдите длину диагонали  $BE$ , если  $AD = 6$ .

**ИЛИ**

В параллелограмме  $ABCD$  с острым углом  $BAD$  из вершины  $B$  проведены высоты  $BP$  и  $BQ$ , причём точка  $P$  лежит на стороне  $AD$ , а точка  $Q$  — на стороне  $CD$ . На стороне  $AD$  отмечена точка  $M$ . Известно, что  $AM = BP$ ,  $AB = BQ$ .

- а) Докажите, что  $BM = PQ$ .  
б) Найдите площадь треугольника  $APQ$ , если  $AM = BP = 8$ ,  $AB = BQ = 10$ .

- 18** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x^2 - 5x - y + 3) \cdot \sqrt{x - y + 3} = 0, \\ y = 3x + a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

**ИЛИ**

Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\left( |x - a^2| + |x + 1| \right)^2 - 7 \left( |x - a^2| + |x + 1| \right) + 4a^2 + 4 = 0$$

имеет ровно два различных корня.

- 19** Из пары натуральных чисел  $(a; b)$ , где  $a > b$ , за один ход получают пару  $(a + b; a - b)$ .

- а) Можно ли за несколько таких ходов получить из пары  $(100; 1)$  пару, большее число в которой равно 400?  
б) Можно ли за несколько таких ходов получить из пары  $(100; 1)$  пару  $(806; 788)$ ?  
в) Какое наименьшее  $a$  может быть в паре  $(a; b)$ , из которой за несколько ходов можно получить пару  $(806; 788)$ ?

**ИЛИ**

На доске записано 10 натуральных чисел, среди которых нет одинаковых. Оказалось, что среднее арифметическое любых четырёх или пяти чисел из записанных является целым числом.

- а) Могут ли среди записанных на доске чисел одновременно быть числа 403 и 2013?  
б) Может ли одно из записанных на доске чисел быть квадратом натурального числа, если среди записанных на доске чисел есть число 403?  
в) Известно, что среди записанных на доске чисел есть число 1 и квадрат натурального числа  $n$ , большего 1. Найдите наименьшее возможное значение  $n$ .



**Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.**

Система оценивания экзаменационной работы по математике  
(профильный уровень)

Правильное выполнение каждого из заданий 1–12 оценивается 1 баллом. Задание считается выполненным верно, если ответ записан в той форме, которая указана в инструкции по выполнению задания, и полностью совпадает с эталоном ответа.

Номер задания	Правильный ответ			
	Пример 1	Пример 2	Пример 3	Пример 4
1	61	18	40	5
2	12	13	4	
3	1,125	36	104	9
4	0,1	0,38	0,3	
5	0,657	0,15	0,79	0,78
6	7	7	93	3
7	0,75	5	125	
8	5	6	1,6	
9	45	5	4900	
10	19	15	8	
11	0,1	5	32	
12	5	–6	16	–18

Решения и критерии оценивания выполнения заданий  
с развёрнутым ответом

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным; все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках, входящих в федеральный перечень учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13 а) Решите уравнение

$$2\sin^3 x = \sqrt{2}\cos^2 x + 2\sin x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$ .

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$\begin{aligned} 2\sin x \cdot (1 - \cos^2 x) - \sqrt{2}\cos^2 x - 2\sin x &= 0; \\ 2\sin x - 2\sin x \cdot \cos^2 x - \sqrt{2}\cos^2 x - 2\sin x &= 0; \\ 2\sin x \cdot \cos^2 x + \sqrt{2}\cos^2 x &= 0; \cos^2 x \cdot (2\sin x + \sqrt{2}) = 0. \end{aligned}$$

Значит,  $\cos x = 0$ , откуда  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , или  $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ , откуда  $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , или  $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ .

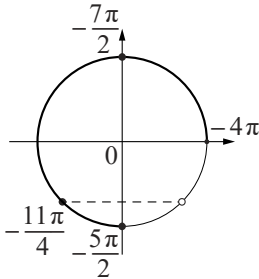
б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку  $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$ .

Получим числа:  $-\frac{7\pi}{2}$ ;  $-\frac{11\pi}{4}$ ;  $-\frac{5\pi}{2}$ .

Ответ: а)  $\frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;  $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;

$$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$$

$$\text{б) } -\frac{7\pi}{2}; -\frac{11\pi}{4}; -\frac{5\pi}{2}.$$



Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

ИЛИ

а) Решите уравнение

$$2 + 2\cos(\pi - 2x) + \sqrt{8}\sin x = \sqrt{6} + \sqrt{12}\sin x.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$ .

**Решение.**

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$2 - 2\cos 2x + 2\sqrt{2}\sin x = \sqrt{6} + 2\sqrt{3}\sin x;$$

$$2 - 2(1 - 2\sin^2 x) + 2\sqrt{2}\sin x - 2\sqrt{3}\sin x - \sqrt{6} = 0;$$

$$4\sin^2 x - 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})\sin x - \sqrt{6} = 0; (2\sin x - \sqrt{3}) \cdot (2\sin x + \sqrt{2}) = 0.$$

Значит,  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , откуда  $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , или  $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi l$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ , или

$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ , откуда  $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , или  $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

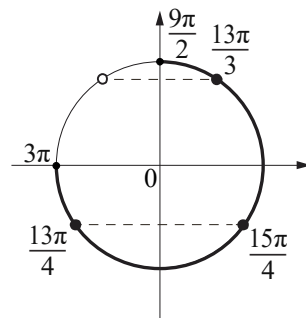
б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку  $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$ .

Получим числа:  $\frac{13\pi}{4}$ ,  $\frac{15\pi}{4}$ ,  $\frac{13\pi}{3}$ .

**Ответ:** а)  $\frac{\pi}{3} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;  $\frac{2\pi}{3} + 2\pi l$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ ;

$-\frac{\pi}{4} + 2\pi m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ ;  $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;

б)  $\frac{13\pi}{4}$ ;  $\frac{15\pi}{4}$ ;  $\frac{13\pi}{3}$ .



Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14

В правильном тетраэдре  $ABCD$  точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $AB$  и  $CD$  соответственно. Плоскость  $\alpha$  перпендикулярна прямой  $MN$  и пересекает ребро  $BC$  в точке  $K$ .

а) Докажите, что прямая  $MN$  перпендикулярна рёбрам  $AB$  и  $CD$ .

б) Найдите площадь сечения тетраэдра  $ABCD$  плоскостью  $\alpha$ , если известно, что  $BK = 1$ ,  $KC = 3$ .

**Решение.**

а) В треугольнике  $ANB$  имеем:  $AN = BN = \frac{\sqrt{3}}{2}CD$ .

Следовательно, он равнобедренный с основанием  $AB$ , а его медиана  $NM$  перпендикулярна ребру  $AB$ .

Аналогично прямая  $MN$  перпендикулярна ребру  $CD$ .

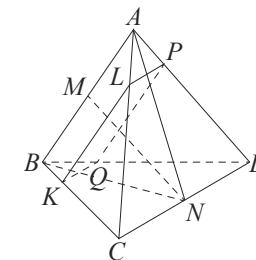
б) Плоскость  $\alpha$ , перпендикулярная прямой  $MN$ , параллельна прямым  $AB$  и  $CD$ , поскольку эти прямые перпендикулярны прямой  $MN$ .

Обозначим точки пересечения рёбер  $AC$ ,  $AD$  и  $BD$

с плоскостью  $\alpha$  через  $L$ ,  $P$  и  $Q$  соответственно. Тогда четырёхугольник  $KLPQ$  является прямоугольником, поскольку его стороны  $KL$  и  $PQ$  параллельны ребру  $AB$ , стороны  $KQ$  и  $LP$  параллельны ребру  $CD$ , а прямые  $AB$  и  $CD$  перпендикулярны.

Треугольники  $KCL$  и  $KBQ$  равносторонние. Следовательно,  $KL = KC = 3$ ,  $QK = BK = 1$ , а площадь прямоугольника  $KLPQ$  равна  $KL \cdot KQ = 3$ .

**Ответ:** б) 3.



Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, но при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

ИЛИ

В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  через ребро  $AB$  провели плоскость  $\alpha$ , образующую сечение  $ABMN$ , где точки  $M$  и  $N$  — точки пересечения плоскости  $\alpha$  с боковыми рёбрами  $SC$  и  $SD$  соответственно. Известно, что  $AB = BM = AN = 5MN$ .

- а) Докажите, что точки  $M$  и  $N$  делят рёбра  $SC$  и  $SD$  в отношении 1:4, считая от вершины  $S$ .  
б) Найдите косинус угла между плоскостью основания  $ABCD$  и плоскостью  $\alpha$ .

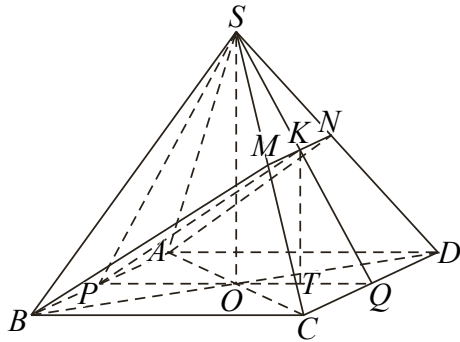
**Решение.**

а) Прямые  $AB$  и  $CD$  параллельны, значит, плоскость  $\alpha$  параллельна прямой  $CD$ . Получаем, что прямая  $MN$ , по которой пересекаются плоскости  $SCD$  и  $\alpha$ , параллельна прямой  $CD$ .

Следовательно,  $\angle SMN = \angle SCD$  и  $\angle SNM = \angle SDC$ , значит, треугольники  $MSN$  и  $CSD$  подобны. Получаем:

$$\frac{SM}{SC} = \frac{SN}{SD} = \frac{MN}{CD} = \frac{1}{5}.$$

Таким образом,  $SM : MC = SN : ND = 1 : 4$ .



- б) Обозначим середины рёбер  $AB$  и  $CD$  точками  $P$  и  $Q$  соответственно, а точку пересечения плоскости  $SPQ$  с отрезком  $MN$  — точкой  $K$ . Прямые  $MN$  и  $CD$  параллельны, поэтому  $SK : KQ = SM : MC = 1 : 4$ . Плоскость  $SPQ$  содержит высоту пирамиды и прямую  $PQ$ , перпендикулярную прямой  $AB$ . Следовательно, плоскость  $SPQ$  перпендикулярна прямой  $AB$ , по которой пересекаются плоскости  $ABC$  и  $\alpha$ , значит, искомый угол равен углу  $KPQ$ .

Пусть  $MN = 2a$ , тогда  $AB = BM = AN = 5MN = 10a$ . Высота  $PK$  равнобедренной трапеции  $ANMB$  равна

$$\sqrt{AN^2 - \left(\frac{AB - MN}{2}\right)^2} = 2\sqrt{21}a.$$

В треугольнике  $SPQ$  опустим перпендикуляры  $SO$  и  $KT$  на сторону  $PQ$ . Тогда точка  $O$  является серединой отрезка  $PQ$ , так как  $SO$  — высота правильной пирамиды  $SABCD$ . По теореме о пропорциональных отрезках  $OT : TQ = SK : KQ = 1 : 4$ . Поскольку  $PQ = BC = 10a$ , получаем:  $PO = OQ = 5a$ ;  $OT = \frac{1}{5}OQ = a$ ;  $PT = PO + OT = 6a$ .

Треугольник  $KPT$  прямоугольный, поэтому

$$\cos \angle KPQ = \cos \angle KPT = \frac{TP}{KP} = \frac{6a}{2\sqrt{21}a} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

**Ответ:** б)  $\frac{\sqrt{21}}{7}$ .

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, но при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

15

Решите неравенство  $\frac{\log_2(2-x) - \log_2(x+1)}{\log_2^2 x^2 + \log_2 x^4 + 1} \geq 0$ .

**Решение.**

Запишем исходное неравенство в виде:

$$\frac{\log_2(2-x) - \log_2(x+1)}{\log_2^2 x^2 + 2\log_2 x^2 + 1} \geq 0; \frac{\log_2(2-x) - \log_2(x+1)}{(\log_2 x^2 + 1)^2} \geq 0.$$

Значение знаменателя  $(\log_2 x^2 + 1)^2$  не определено при  $x=0$ , равно нулю

при  $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  и при  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$  и положительно при других значениях  $x$ .

При  $x \neq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $x \neq 0$  и  $x \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$  неравенство принимает вид:

$$\log_2(2-x) - \log_2(x+1) \geq 0; \log_2(x+1) \leq \log_2(2-x); 0 < x+1 \leq 2-x,$$

откуда  $-1 < x \leq \frac{1}{2}$ . Учитывая условия  $x \neq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $x \neq 0$  и  $x \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$ , получаем:

$$-1 < x < -\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 0; 0 < x \leq \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \left(-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right); \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right); \left(0; \frac{1}{2}\right].$$

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки $\frac{1}{2}$ , ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

**ИЛИ**

Решите неравенство  $\frac{27^x - 9^{x+1} + 3^{x+3} - 27}{50x^2 - 110x + 60,5} \geq 0$ .

**Решение.**

Запишем исходное неравенство в виде:

$$\frac{3^{3x} - 3 \cdot 3^{2x} \cdot 3 + 3 \cdot 3^x \cdot 3^2 - 3^3}{0,5(100x^2 - 220x + 121)} \geq 0; \frac{(3^x - 3)^3}{(10x - 11)^2} \geq 0.$$

Значение знаменателя  $(10x - 11)^2$  равно нулю при  $x=1,1$  и положительно при других значениях  $x$ . При  $x \neq 1,1$  неравенство принимает вид:

$$(3^x - 3)^3 \geq 0; 3^x \geq 3,$$

откуда  $x \geq 1$ . Учитывая ограничение  $x \neq 1,1$ , получаем:  $1 \leq x < 1,1$ ;  $x > 1,1$ .

**Ответ:**  $[1; 1,1)$ ;  $(1,1; +\infty)$ .

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 1, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

**16** В июле 2026 года планируется взять кредит на десять лет в размере 800 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг будет возрастать на  $r\%$  по сравнению с концом предыдущего года ( $r$  — целое число);
- с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;
- в июле 2027, 2028, 2029, 2030 и 2031 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- в июле 2031 года долг должен составить 200 тыс. рублей;
- в июле 2032, 2033, 2034, 2035 и 2036 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2036 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 1480 тыс. рублей. Найдите  $r$ .

#### Решение.

По условию долг (в тыс. рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться следующим образом:

800; 680; 560; 440; 320; 200; 160; 120; 80; 40; 0.

Пусть  $k = 1 + \frac{r}{100}$ . Тогда последовательность размеров долга (в тыс. рублей)

по состоянию на январь такова:

800 $k$ ; 680 $k$ ; 560 $k$ ; 440 $k$ ; 320 $k$ ; 200 $k$ ; 160 $k$ ; 120 $k$ ; 80 $k$ ; 40 $k$ .

Следовательно, платежи (в тыс. рублей) должны быть следующими:

800 $k$  – 680; 680 $k$  – 560; 560 $k$  – 440; 440 $k$  – 320; 320 $k$  – 200;

200 $k$  – 160; 160 $k$  – 120; 120 $k$  – 80; 80 $k$  – 40; 40 $k$ .

Значит, сумма всех платежей (в тыс. рублей) будет составлять:

$$5(560k - 440) + 5(120k - 80) = 3400k - 2600.$$

Получаем:  $3400k - 2600 = 1480$ , откуда  $k = 1,2$  и  $r = 20$ .

**Ответ:** 20.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

#### ИЛИ

15 декабря 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму  $A$  млн рублей на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- к 15 декабря 2028 года кредит должен быть полностью погашен.

Чему равно  $A$ , если общая сумма платежей в 2028 году составит 17 925 тыс. рублей?

#### Решение.

По условию долг перед банком по состоянию на 15-е число каждого месяца должен уменьшаться на  $\frac{1000A}{24} = \frac{125A}{3}$  тыс. рублей, следовательно, по состоянию на 15 декабря 2027 года и на 15-е число каждого месяца 2028 года долг (в тыс. рублей) должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$$500A; \frac{1375A}{3}; \frac{1250A}{3}; \dots; \frac{250A}{3}; \frac{125A}{3}; 0.$$

Первого числа каждого месяца 2028 года долг возрастает на 3 %, значит, последовательность размеров долга (в тыс. рублей) по состоянию на 1-е число такова:

$$1,03 \cdot 500A; 1,03 \cdot \frac{1375A}{3}; \dots; 1,03 \cdot \frac{250A}{3}; 1,03 \cdot \frac{125A}{3}.$$

Следовательно, платежи (в тыс. рублей) должны быть следующими:

$$\frac{125A}{3} + 15A; \frac{125A}{3} + 13,75A; \dots; \frac{125A}{3} + 2,5A; \frac{125A}{3} + 1,25A.$$

Всего следует выплатить в 2028 году

$$12 \cdot \frac{170A + 128,75A}{2 \cdot 3} = 597,5A \text{ тыс. рублей,}$$

откуда  $597,5A = 17\,925$ ;  $A = 30$ .

**Ответ:** 30.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

- 17 Пятиугольник  $ABCDE$  вписан в окружность. Известно, что  $AB = CD = 3$ ,  $BC = DE = 4$ .

- а) Докажите, что  $AC = CE$ .  
б) Найдите длину диагонали  $BE$ , если  $AD = 6$ .

**Решение.**

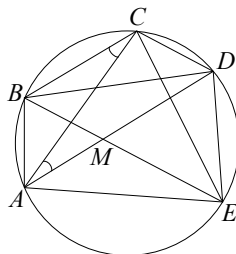
а) В четырёхугольнике  $ABCD$  острые углы  $ACB$  и  $CAD$  опираются на равные хорды  $AB$  и  $CD$ . Следовательно,  $\angle ACB = \angle CAD$ , а значит, прямые  $BC$  и  $AD$  параллельны. Аналогично прямые  $CD$  и  $BE$  параллельны. Значит, четырёхугольники  $ABCD$  и  $BCDE$  являются равнобедренными трапециями. Следовательно,  $AC = BD = CE$ .

б) Обозначим точку пересечения диагоналей  $AD$  и  $BE$  через  $M$ . Четырёхугольник  $BCDM$  является параллелограммом, поскольку его противоположные стороны параллельны. Значит:  $BM = CD = AB = 3$ ,  $DM = BC = DE = 4$ . Следовательно, треугольники  $ABM$  и  $MDE$  равнобедренные, причём  $\angle BAM = \angle AMB = \angle DME = \angle DEM$ . Значит, эти треугольники подобны с коэффициентом подобия  $\frac{DE}{AB} = \frac{4}{3}$ , откуда получаем:

$$ME = \frac{DE}{AB} \cdot AM = \frac{DE}{AB} \cdot (AD - DM) = \frac{8}{3};$$

$$BE = BM + ME = \frac{17}{3}.$$

**Ответ:** б)  $\frac{17}{3}$ .



**ИЛИ**

В параллелограмме  $ABCD$  с острым углом  $BAD$  из вершины  $B$  проведены высоты  $BP$  и  $BQ$ , причём точка  $P$  лежит на стороне  $AD$ , а точка  $Q$  — на стороне  $CD$ . На стороне  $AD$  отмечена точка  $M$ . Известно, что  $AM = BP$ ,  $AB = BQ$ .

- а) Докажите, что  $BM = PQ$ .  
б) Найдите площадь треугольника  $APQ$ , если  $AM = BP = 8$ ,  $AB = BQ = 10$ .

**Решение.**

а) Заметим, что:

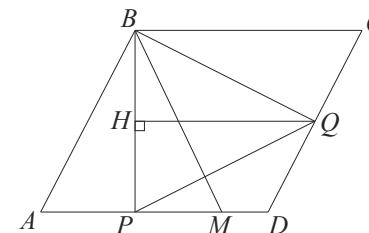
$$\angle ABC = 180^\circ - \angle BAD, \quad \angle ABP = 90^\circ - \angle BAD,$$

$$\angle CBQ = 90^\circ - \angle BCD = 90^\circ - \angle BAD.$$

Таким образом,

$$\angle PBQ = \angle ABC - \angle ABP - \angle CBQ = \angle BAD.$$

Значит, треугольники  $MAB$  и  $PBQ$  равны, поскольку  $AM = BP$ ,  $AB = BQ$  и  $\angle MAB = \angle PBQ$ . Следовательно,  $BM = PQ$ .



б) В треугольнике  $ABP$ , по теореме Пифагора, получаем:

$$AP = \sqrt{AB^2 - BP^2} = 6.$$

Пусть  $QH$  — высота треугольника  $BQP$ . Тогда треугольники  $ABP$  и  $BQH$  равны, поскольку  $AB = BQ$ ,  $\angle BAP = \angle QBH$  и  $\angle APB = \angle BHQ = 90^\circ$ . Следовательно,  $BH = AP = 6$ . Значит,  $PH = BP - BH = 2$ .

Площади треугольников  $APQ$  и  $APH$  равны, поскольку прямые  $AP$  и  $QH$  параллельны. Площадь треугольника  $APH$  равна

$$\frac{AP \cdot PH}{2} = \frac{6 \cdot 2}{2} = 6.$$

Следовательно, площадь треугольника  $APQ$  равна 6.

**Ответ:** б) 6.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, но при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3



Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ и обоснованно получен верный ответ в пункте $b$	3
Получен обоснованный ответ в пункте $b$ ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ , но при обоснованном решении пункта $b$ получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ , ИЛИ при обоснованном решении пункта $b$ получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте $b$ с использованием утверждения пункта $a$ , при этом пункт $a$ не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	<i>3</i>

- 18 Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x^2 - 5x - y + 3) \cdot \sqrt{x - y + 3} = 0, \\ y = 3x + a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

**Решение.**

Каждое решение уравнения  $(x^2 - 5x - y + 3) \cdot \sqrt{x - y + 3} = 0$  либо является решением уравнения  $x - y + 3 = 0$ , откуда  $y = x + 3$ , либо является решением системы:

$$\begin{cases} x^2 - 5x - y + 3 = 0, \\ x - y + 3 \geq 0; \end{cases} \begin{cases} y = x^2 - 5x + 3, \\ y \leq x + 3; \end{cases} \begin{cases} y = x^2 - 5x + 3, \\ x^2 - 5x + 3 \leq x + 3; \end{cases} \begin{cases} y = x^2 - 5x + 3, \\ x^2 - 6x \leq 0, \end{cases}$$

откуда  $y = x^2 - 5x + 3$  при условии  $0 \leq x \leq 6$ .

Для каждого из этих случаев подставим  $y = 3x + a$  и найдём количество корней получившегося уравнения в зависимости от  $a$ .

Первый случай:  $3x + a = x + 3$ , откуда  $x = \frac{3-a}{2}$ .

Второй случай:  $3x + a = x^2 - 5x + 3$  при условии  $0 \leq x \leq 6$ . Получаем квадратное уравнение  $x^2 - 8x - a + 3 = 0$ . Дискриминант этого уравнения равен  $64 + 4(a - 3) = 4(a + 13)$ . Значит, уравнение  $x^2 - 8x - a + 3 = 0$  имеет два корня при  $a > -13$ , имеет единственный корень  $x = 4$  при  $a = -13$  и не имеет корней при  $a < -13$ .

При  $a > -13$  функция  $f(x) = x^2 - 8x - a + 3$  принимает наименьшее значение при  $x = 4$ , и это значение отрицательно. Следовательно, больший корень уравнения  $f(x) = 0$  удовлетворяет условию  $0 \leq x \leq 6$  тогда и только тогда, когда  $f(6) \geq 0$ ;  $-a - 9 \geq 0$ , откуда  $a \leq -9$ .

Аналогично меньший корень уравнения  $f(x) = 0$  удовлетворяет условию  $0 \leq x \leq 6$  тогда и только тогда, когда  $f(0) \geq 0$ ;  $-a + 3 \geq 0$ , откуда  $a \leq 3$ .

Число  $\frac{3-a}{2}$  является корнем квадратного уравнения  $f(x) = 0$

при  $\left(\frac{3-a}{2}\right)^2 - 4(3-a) - a + 3 = 0$ , откуда

$$\left(\frac{a-3}{2}\right)^2 + 3(a-3) = 0; (a-3)(a+9) = 0,$$

то есть при  $a = 3$  и при  $a = -9$ .

Таким образом, исходная система уравнений имеет ровно два различных решения при  $a = -13$ ;  $-9 \leq a < 3$ .

**Ответ:**  $a = -13$ ;  $-9 \leq a < 3$ .

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений $a$ , отличающееся от искомого только исключением/включением точек $a = -9$ и / или $a = 3$	3
С помощью верного рассуждения получен промежуток $(-9; 3)$ множества значений $a$ , возможно, с включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения параболы и прямых (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	<i>4</i>



**ИЛИ**

Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\left(|x - a^2| + |x + 1|\right)^2 - 7\left(|x - a^2| + |x + 1|\right) + 4a^2 + 4 = 0$$

имеет ровно два различных корня.

**Решение.**

Рассмотрим кусочно-линейную функцию  $y = |x - a^2| + |x + 1|$ .

При  $x < -1$  имеем  $y = -2x + a^2 - 1$ , при  $-1 \leq x < a^2$  имеем  $y = a^2 + 1$ , при  $x \geq a^2$  имеем  $y = 2x - a^2 + 1$ . На промежутке  $(-\infty; -1]$  функция убывает,  $y(-1) = a^2 + 1$ ; на промежутке  $[-1; a^2]$  функция принимает постоянное значение  $a^2 + 1$ ; на промежутке  $[a^2; +\infty)$  функция возрастает,  $y(a^2) = a^2 + 1$ . Таким образом, значение  $y = a^2 + 1$  принимается при всех  $x$  таких, что  $-1 \leq x \leq a^2$ ; значения  $y < a^2 + 1$  не принимаются ни при каких  $x$ , а каждое из значений  $y > a^2 + 1$  принимается при двух различных  $x$ .

Для того чтобы исходное уравнение имело ровно два различных корня, должны выполняться следующие условия: на промежутке  $(a^2 + 1; +\infty)$  уравнение  $y^2 - 7y + 4a^2 + 4 = 0$  должно иметь ровно один корень, причём число  $a^2 + 1$  не должно являться корнем этого уравнения. Эти условия выполнены в двух случаях.

В первом случае уравнение  $y^2 - 7y + 4a^2 + 4 = 0$  имеет единственный корень, причём он больше  $a^2 + 1$ . Дискриминант уравнения  $D = 33 - 16a^2$  равен нулю при  $a = -\frac{\sqrt{33}}{4}$  или  $a = \frac{\sqrt{33}}{4}$ . При каждом из этих значений  $a$  уравнение имеет ровно один корень  $3,5 > a^2 + 1 = \frac{49}{16}$ , поэтому  $a = -\frac{\sqrt{33}}{4}$  и  $a = \frac{\sqrt{33}}{4}$  удовлетворяют условию задачи.

Во втором случае уравнение  $y^2 - 7y + 4a^2 + 4 = 0$  имеет два корня, причём один из них больше  $a^2 + 1$ , а другой меньше  $a^2 + 1$ . Это равносильно тому, что  $f(a^2 + 1) < 0$ , где  $f(y) = y^2 - 7y + 4a^2 + 4$ . Поскольку  $f(a^2 + 1) = (a^2 + 1)^2 - 7(a^2 + 1) + 4a^2 + 4 = a^4 - a^2 - 2 = (a^2 - 2)(a^2 + 1)$ , неравенство  $f(a^2 + 1) < 0$  равносильно неравенству  $(a^2 - 2)(a^2 + 1) < 0$ , откуда получаем:  $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$ .

**Ответ:**  $a = -\frac{\sqrt{33}}{4}$ ;  $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$ ;  $a = \frac{\sqrt{33}}{4}$ .

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений $a$ , отличающееся от искомого только включением точек $a = -\sqrt{2}$ и / или $a = \sqrt{2}$	3
С помощью верного рассуждения получено множество значений $a$ , отличающееся от искомого только исключением точек $a = -\frac{\sqrt{33}}{4}$ и / или $a = \frac{\sqrt{33}}{4}$ , ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию расположения корней квадратного уравнения $y^2 - 7y + 4a^2 + 4 = 0$ , где $y =  x - a^2  +  x + 1 $	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

**19** Из пары натуральных чисел  $(a; b)$ , где  $a > b$ , за один ход получают пару  $(a + b; a - b)$ .

- а) Можно ли за несколько таких ходов получить из пары  $(100; 1)$  пару, большее число в которой равно 400?  
 б) Можно ли за несколько таких ходов получить из пары  $(100; 1)$  пару  $(806; 788)$ ?  
 в) Какое наименьшее  $a$  может быть в паре  $(a; b)$ , из которой за несколько ходов можно получить пару  $(806; 788)$ ?

**Решение.**

а) Из пары  $(100; 1)$  за один ход получается пара  $(101; 99)$ , за два хода получается пара  $(200; 2)$ , за три хода получается пара  $(202; 198)$ , а за четыре хода получается пара  $(400; 4)$ .

б) Заметим, что за один ход из пары  $(a; b)$  получается пара  $(a + b; a - b)$ , а за два хода получается пара  $(2a; 2b)$ . Следовательно, из пары  $(100; 1)$  можно получить только пары  $(2^k \cdot 100; 2^k)$  и  $(2^k \cdot 101; 2^k \cdot 99)$ , где  $k$  — неотрицательное целое число. Число 806 не равно  $2^k \cdot 100$  и  $2^k \cdot 101$ , а значит, пару  $(806; 788)$  невозможно получить за несколько ходов из пары  $(100; 1)$ .

в) Заметим, что пару  $(c; d)$  за один ход можно получить только из пары  $\left(\frac{c+d}{2}; \frac{c-d}{2}\right)$  при условии, что числа  $c$  и  $d$  одной чётности.

Таким образом, пара  $(806; 788)$  получается из пары  $(797; 9)$ , которая получается из пары  $(403; 394)$ . Пару  $(403; 394)$  невозможно получить за один ход ни из какой пары, поскольку числа 403 и 394 имеют разную чётность. Следовательно, наименьшее число  $a$  в паре  $(a; b)$ , из которой за несколько ходов можно получить пару  $(806; 788)$ , равно 403.

**Ответ:** а) да; б) нет; в) 403.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах $a$ , $b$ и $v$	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте $v$ и обоснованно получен верный ответ в пункте $a$ или $b$	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах $a$ и $b$ ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте $v$	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте $a$ или $b$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

**ИЛИ**

На доске записано 10 натуральных чисел, среди которых нет одинаковых. Оказалось, что среднее арифметическое любых четырёх или пяти чисел из записанных является целым числом.

- а) Могут ли среди записанных на доске чисел одновременно быть числа 403 и 2013?  
 б) Может ли одно из записанных на доске чисел быть квадратом натурального числа, если среди записанных на доске чисел есть число 403?  
 в) Известно, что среди записанных на доске чисел есть число 1 и квадрат натурального числа  $n$ , большего 1. Найдите наименьшее возможное значение  $n$ .

**Решение.**

а) Рассмотрим пять чисел:  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  и  $e$ , записанных на доске. Средние арифметические  $\frac{a+b+c+d}{4}$  и  $\frac{b+c+d+e}{4}$  должны быть целыми числами.

Следовательно, числа  $a+b+c+d$  и  $b+c+d+e$  должны делиться на 4, а значит, их разность  $a-e$  также должна делиться на 4. Таким образом, разность любых двух чисел, записанных на доске, делится на 4. Аналогично можно показать, что разность любых двух чисел, записанных на доске, делится на 5, а значит, разность любых двух чисел, записанных на доске, делится на 20. Разность чисел 2013 и 403 равна 1610 и не делится на 20. Следовательно, числа 403 и 2013 одновременно не могут быть среди записанных чисел.

б) Остаток от деления числа 403 на 20 равен 3. Значит, остаток от деления любого записанного на доске числа на 20 равен 3, то есть любое число, записанное на доске, можно представить в виде  $20k + 3$ , где  $k$  — натуральное число или 0. Остаток от деления такого числа на 4 равен 3.

С другой стороны, остаток от деления любого квадрата натурального числа на 4 равен 0 или 1. Значит, среди чисел, записанных на доске, не может быть квадратов натуральных чисел.

в) Числа 1 и  $n^2$  должны давать одинаковые остатки при делении на 20, то есть число  $n^2 - 1$  должно делиться на 20. Поскольку  $n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1)$ , одно из чисел  $n - 1$  и  $n + 1$  должно делиться на 5. Таким образом, перебирая числа, для которых это выполнено, то есть числа 4, 6, 9, 11, 14, 16, ..., получаем, что наименьшее значение  $n$ , для которого  $n^2 - 1$  делится на 20, равно 9. Примером чисел, удовлетворяющих условию задачи, для которых  $n = 9$ , служит набор чисел:

1, 21, 41, 61, 81, 101, 121, 141, 161, 181, содержащий число 81.

**Ответ:** а) нет; б) нет; в) 9.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах <i>a</i> , <i>b</i> и <i>c</i>	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>c</i> и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>a</i> или <i>b</i>	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах <i>a</i> и <i>b</i> ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте <i>c</i>	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>a</i> или <i>b</i>	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособрнадзора от 04.04.2023 № 233/552, зарегистрирован Минюстом России 15.05.2023 № 73314)

«81. Проверка экзаменационных работ включает в себя:

1) проверку и оценивание предметными комиссиями ответов на задания КИМ для проведения ЕГЭ с развёрнутым ответом <...>, в том числе устных ответов, в соответствии с критериями оценивания по соответствующему учебному предмету, разработка которых организуется Рособрнадзором<sup>1</sup>. <...>

По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют первичные баллы за каждый ответ на задания КИМ для проведения ЕГЭ с развёрнутым ответом. <...>

В случае существенного расхождения в первичных баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в первичных баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету, разработка которых организуется Рособрнадзором.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о первичных баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

Существенными считаются следующие расхождения.

1. Расхождение между баллами, выставленными двумя экспертами за выполнение любого из заданий 13–19, составляет 2 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет только те ответы на задания, которые были оценены со столь существенным расхождением.

2. Расхождение между суммами баллов, выставленных двумя экспертами за выполнение заданий 13–19, составляет 3 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет ответы на все задания работы.

3. Расхождение в результатах оценивания двумя экспертами ответа на одно из заданий 13–19 заключается в том, что один эксперт указал на отсутствие ответа на задание, а другой выставил за выполнение этого задания ненулевой балл. В этом случае третий эксперт проверяет только ответы на задания, которые были оценены со столь существенным расхождением.

4. Ситуации, в которых один эксперт указал на отсутствие ответа в экзаменационной работе, а второй эксперт выставил нулевой балл за выполнение этого задания, не являются ситуациями существенного расхождения в оценивании.

<sup>1</sup> Часть 14 статьи 59 Федерального закона от 29.12.2012 № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации».